مقاله

دترمینان در سرزمین ریاضیات!

مرتضی بیات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان
زهرا خاتمی، دبیر ریاضی ناحیهٔ یک زنجان

مقدمه

در این مقاله، قصد داریم چند روش ساده و بازگشتی برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس مربعی ارائه دهیم. روش تراکم برای محاسبهٔ دترمینان اولین بار توسط لوئیس کارول (معروف به داجسون) (۶۷-۱۸۶۶) ریاضیدان و نویسنده کتاب «آلیس درسرزمین عجایب» ارائه گردید (زیلبِرگِر، ۱۹۹۷). این روش ساده و مبتکرانه متأسفانه در بین علاقه‌مندان ریاضی فراگیر نشده است. اما اخیراً این روش به‌طور مؤثری در بین کارهای تعدادی از ریاضی‌دانان، برجسته شده است، به‌طوری که حدس ماتریس‌های با علامت‌های متناوب به‌کمک این روش، حل گردیده است (بِرِسود و پِروپ، ۱۹۹۹).

همان‌گونه که می‌دانیم، دترمینان با روش‌های مختلفی به‌شرح زیر محاسبه می‌شود:

الگوها. روش الگو معمولاً برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ و ۳×۳ به‌کار برده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۱\times ۴ - ۲\times ۳ = -۲$$

$$\left|\begin{matrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{matrix}\right|\begin{matrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{matrix}\right| = (-۱)\times ۵\times ۹ + ۲\times ۶\times ۷ + ۳\times ۴\times ۸ - (۷\times ۵\times ۳ + ۸\times ۶\times (-۱) + ۹\times ۴\times ۲)$$

بسط براساس عامل‌ها. براساس بسط لاپلاس نسبت به هر سطر (یا هر ستون)، دترمینان بسط داده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = (-۱)^{۱+۱}\times(-۱)\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۲}\times ۲\times\begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۷ & ۹ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۳}\times ۳\times\begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{vmatrix}$$

مثلثی‌کردن یا روش حذفی گاوس.

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱۳ & ۱۸ \\ ۰ & ۲۲ & ۳۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱۳ & ۱۸ \\ ۰ & ۰ & -۶/۱۳ \end{vmatrix} = (-۱)\times ۱۳\times\left(-\frac{۶}{۱۳}\right) = ۶$$

سه روش بالا از جهاتی ناکارآمد هستند که در زیر، به‌آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱. معمولاً الگوها برای ماتریس‌های ۴×۴ و بالاتر، قابل تعمیم نیستند.

۲. بسط براساس عامل‌ها، مستعد خطا و نیز برای محاسبات دستی، خسته‌کننده است.

۳. مثلثی کردن، همواره ساده نیست و برای استفاده از این روش، اساساً بایستی از کسرها استفاده نمود.

روش تراکم داجسون (یا الگوریتم آلیس)

در ریاضیات، روش تراکم داجسون، روشی برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های مربعی است. باید گفته شود که این روش، یک حالت خاص از قضیهٔ ژاکوبی (۱۸۳۳) اســت. اما داجســون، به‌طور مستقل، این ایده را کشف و بیان کرده است.

الگوریتم داجسون (یا الگوریتم آلیس) در چهار گام زیر، ارائه می‌شود:

گام ۱. فرض کنیم A ماتریس $n\times n$ باشد. ابتدا این ماتریس را چنان مرتب می‌کنیم که هیچ صفری در درایه‌های درونی آن اتفاق نیفتد. درایه‌های درونی به‌شکل $a_{i,j}$ هستند که $i,j\neq ۱,n$. برای آنکه درایه‌های درونی را ناصفر کنیم با استفاده از اعمال مقدماتی، مثلاً جمع کردن یک سطر با مضربی از سطر دیگر بدون آنکه مقدار دترمینان تغییر کند، به‌دست می‌آوریم.

گام ۲. یــک ماتریس B از مرتبه $(n-۱)\times(n-۱)$، با اســتفاده از دترمینان‌هایــی از زیرماتریس‌های ۲×۲ ایجاد می‌کنیم.

به‌طور صریح $\begin{vmatrix} \text{قبع} & \text{قبع}_{+۱} \\ \text{فـ۱افـع}_{,ف} & \text{فـ۱افـع}_{,ف+۱} \end{vmatrix} = \text{قبع}$.

گام ۳. عملیــات گام ۲ را روی ماتریــس B انجــام می‌دهیــم و به‌یــک ماتریــس C از مرتبــهٔ $(n-۲)\times(n-۲)$ می‌رســیم. ســپس هر جمله از C را بر جملهٔ متناظرش در عناصر درونی A تقســیم می‌کنیم، یعنی $\dfrac{\text{قبع}}{\text{فـ۱افـع}_{,ف+۱}} = \text{قبع}$.

گام ۴. گیریم A=B و B=C، حال گام ۳ را تا رسیدن به‌یک ماتریس ۱×۱ تکرار می‌کنیم. تنها درایهٔ ماتریس ۱×۱، نشانگر مقدار دترمینان ماتریس اصلی است.

مثال ۱. با استفاده از روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|\text{ا}| = \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & \boxed{۵} & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = \text{ء}$$

حل. شرایط گام ۱ برقرار است. حال طبق گام ۲ داریم:

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۳ & -۳ \\ -۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

اینک طبق گام ۳ داریم:

$$\text{د} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -۱۳ & -۳ \\ -۳ & -۳ \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \text{ضص}\xrightarrow{\div ۵}\text{ضصع}$$

بنابراین، $|\text{ا}| = ۶$.

مثال ۲. با استفاده از روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|\text{ا}| = \begin{vmatrix} -۲ & -۱ & -۱ & -۴ \\ -۱ & -۲ & -۱ & -۶ \\ -۱ & -۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۳ & -۸ \end{vmatrix}$$

حل. گام ۱ برقرار است، حال طبق گام ۲ داریم:

$$\text{ب}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-۲ & -۱\\ -۱ & -۲\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-۱ & -۱\\ -۲ & -۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-۱ & -۴\\ -۱ & -۶\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ -۱ & -۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-۲ & -۱\\ -۱ & ۲\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-۱ & -۶\\ ۲ & ۴\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & -۳\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۲ & ۴\\ -۳ & -۸\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۲\\ -۱ & \boxed{-۵} & ۸\\ ۱ & ۱ & -۴\end{bmatrix}$$

اینک طبق گام ۳ داریم:

$$\text{د}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & -۵\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ -۵ & ۸\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-۱ & -۵\\ ۱ & ۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-۵ & ۸\\ ۱ & -۴\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۶ & ۲\\ ۴ & ۱۲\end{bmatrix}\xrightarrow{\div\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\frac{۸}{-۲} & \frac{۲}{-۱}\\ \frac{۴}{-۱} & \frac{۱۲}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ -۴ & ۶\end{bmatrix}$$

با تکرار مجدد گام‌های بالا برای ماتریس $\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ -۴ & ۶\end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۸ & -۲\\ -۴ & ۶\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\text{ض۴ص}\xrightarrow{\div ۵}\text{ض۸ص}$$

بنابراین $-۸ = |\text{ا}|$.

یکی از مشکلاتی که در روش تراکم داجسون وجود دارد، صفر شدن درایه‌های درونی است.

مثال ۳. با روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید:

$$|\text{ا}|=\begin{vmatrix}۲ & -۱ & ۲ & ۱ & -۳\\ ۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲\\ ۱ & -۱ & -۲ & -۱ & -۱\\ ۲ & ۱ & -۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & -۲ & -۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}$$

حل. با اجرای گام‌های الگوریتم داجسون داریم:

$$\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۲ & ۱ & -۳\\ ۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲\\ ۱ & -۱ & -۲ & -۱ & -۱\\ ۲ & ۱ & -۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & -۲ & -۱ & -۱ & ۲\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۵ & -۵ & -۳ & ۱\\ -۳ & -۳ & -۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳ & -۱\\ -۵ & -۳ & -۱ & -۵\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-۳۰ & ۶ & -۱۲\\ ۰ & \boxed{۰} & ۶\\ ۶ & -۶ & ۸\end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که در گام سوم، عنصر درایه‌های درونی صفر است. اینک با تعویض سطر اول و پنجم (با این عمل مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند)، مجدداً الگوریتم را تکرار می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲\\ ۱ & -۱ & -۲ & -۱ & -۱\\ ۲ & ۱ & -۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & -۲ & -۱ & -۱ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۲ & ۱ & -۳\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-۳ & -۳ & -۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳ & -۱\\ -۵ & -۳ & -۱ & -۵\\ ۳ & -۵ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۶\\ ۶ & \boxed{-۶} & ۸\\ -۱۷ & ۸ & -۴\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۰ & ۱۲\\ ۱۸ & ۴۰\end{bmatrix}\to\text{ض۳۶ص}$$

بنابراین $۳۶ = |\text{ا}|$.

روش انباشتگی محوری

در این بخش، روش دیگری برای محاسبه دترمینان ارائه می‌دهیم که دیگر مشکل صفر شدن درایه‌های درونی را ندارد.

در این روش، باید یک درایهٔ ناصفر را به‌عنوان لولا در نظر بگیریم (در اینجا درایه واقع در سطر اول و ستون اول که ناصفر است را لولا در نظر می‌گیریم، البته می‌توانیم هر درایهٔ ناصفر را لولا در نظر بگیریم. در این صورت، سطر اول را با سطرهای دیگر برای ساختن دترمینان ۲×۲ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻋ} & \text{ﻌ} \\ \text{ﻊ} & \text{غ} & \text{ﻏ} \\ \text{ﻐ} & \text{ﻎ} & \text{ق} \end{vmatrix} = \frac{۱}{\text{ع}^{۳-۲}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻋ} \\ \text{ﻊ} & \text{غ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻌ} \\ \text{ﻊ} & \text{ﻏ} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻋ} \\ \text{ﻐ} & \text{ﻎ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻌ} \\ \text{ﻐ} & \text{ق} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻋ} & \text{ﻌ} & \text{ﻊ} \\ \text{غ} & \text{ﻏ} & \text{ﻐ} & \text{ﻎ} \\ \text{ق} & \text{ﻗ} & \text{ک} & \text{ﮐ} \\ \text{گ} & \text{ﮔ} & \text{ل} & \text{لا} \end{vmatrix} = \frac{۱}{\text{ع}^{۴-۲}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻋ} \\ \text{غ} & \text{ﻏ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻌ} \\ \text{غ} & \text{ﻐ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻊ} \\ \text{غ} & \text{ﻎ} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻋ} \\ \text{ق} & \text{ﻗ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻌ} \\ \text{ق} & \text{ک} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻊ} \\ \text{ق} & \text{ﮐ} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻋ} \\ \text{گ} & \text{ﮔ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻌ} \\ \text{گ} & \text{ل} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ﻊ} \\ \text{گ} & \text{لا} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

توجه داریم که برای دترمینان ماتریس n×n، در مخرج درایهٔ لولا با توان ۲-n ظاهر می‌شود.

مثال ۴. از روش انباشتگی محوری، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|\text{ا}| = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۴ & ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \end{vmatrix}$$

حل. با توجه به فرمول، خواهیم داشت:

$$|\text{ا}| = \frac{۱}{۲^{۲}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{۱}{۴} \begin{vmatrix} -۷ & ۷ & ۰ \\ ۱۱ & ۵ & -۲ \\ -۱ & -۱ & -۴ \end{vmatrix}$$

اینک دترمینان ماتریس ۳×۳ را محاسبه می‌کنیم:

$$|\text{ا}| = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{-۷} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} -۷ & ۷ \\ ۱۱ & ۵ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -۷ & ۰ \\ ۱۱ & -۲ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -۷ & ۷ \\ -۱ & -۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -۷ & ۰ \\ -۱ & -۴ \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{۱}{-۲۸} \begin{vmatrix} -۱۱۲ & ۱۴ \\ ۱۴ & ۲۸ \end{vmatrix}$$

منابع

1. C.L. Dodgson, *Condensation of Determinants*, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values, Proceedings of the Royal Society of London, 15 (1866-1867), 150-155.
2. D. Zeilberger, *Dodgson's determinant evaluation rule proved by two-timing men and women*, Electronic Journal of Combinatorics, 4 no. 2 (1997).
3. M.D. Bressoud and J. Propp. (1999). *How the alternating sign matrix conjecture was solved*, Notices of the American Mathematical Society, 46, 637-646.
4. C.G.J. Jacobi, *De Binis Quibulibet Functionibus Homogeneis Secundi*…, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 12 (1833), 1-69.

مرجع

D. Leggett, J. Perry and A. Sanders, *Determinants in Wonderland*, www.math.usm.edu/perry/Research/determinants_in_Wonderland.pdf.